Acta Sci. Math., 45 (1983), 305—315

Представление функций в выпуклых областях обобщенными рядами экспонент

А. Ф. ЛЕОНТЬЕВ

Посвящается академику Б. Секефальви-Надь к его семидесятилетию

Пусть D — конечная выпуклая область. Известно (см. [1]), что любую функцию $F(z)$, аналитическую в D, можно представить рядом экспонент

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\lambda_n z}, \quad z \in D.$$

Показатели λ_n зависят лишь от области D, имеют конечную верхнюю плотность, ряд в области D сходится абсолютно, а внутри — равномерно.

Здесь будет приведен класс A функций $f(z)$ экспоненциального типа, обладающих свойством: любая функция $\Phi(z)$, аналитическая в выпуклой области D $(0 \in D)$, представляется в D равномерно сходящимся внутри D рядом

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n f(\lambda_n z), \quad z \in D.$$

1. Определение класса A. По определению функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ принадлежит классу A, если $a_n \neq 0$ $(n \geqq 0)$ и функции

$$\eta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{t^{n+1}}, \quad \eta_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n t^{n+1}}$$

регулярны вне отрезка [0,1] вещественной оси.

Классу A принадлежит функция e^z, в этом случае

$$\eta(t) = \eta_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{t^{n+1}} = \frac{1}{t-1}.$$

Поступило 5-ого апреля 1982 г.

Имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\leqq 1,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{a_n}\right|}\leqq 1,$$

откуда следует, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$. Следовательно, $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа равного единице.

Отметим, что $\eta(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $f(z)$.

2. Достаточный признак принадлежности функции классу A.

Теорема 1. *Пусть* $a_n=\varphi(n)$, $\frac{1}{a_n}=\varphi_1(n)$, $n\geqq N$, *где* $\varphi(z)$ *и* $\varphi_1(z)$ — *функции, аналитические в полуплоскости* $\operatorname{Re} z\geqq N$ и

(1) $$|\varphi(z)|<e^{\varepsilon|z|},\ |\varphi_1(z)|<e^{\varepsilon|z|},\ \operatorname{Re} z\geqq N,\ |z|>r_0(\varepsilon),\ \forall\varepsilon>0.$$

Тогда $f(z)\in A$.

Доказательство. Возьмем $\varphi_0, 0<\varphi_0<\frac{\pi}{2}$ и нецелое $p\geqq N$. Пусть q — точка пересечения луча $\arg z=\varphi_0$ с прямой $\operatorname{Re} z=p$. Обозначим Γ контур, составленный из лучей $[q, \infty e^{i\varphi_0})$, $[\bar q, \infty e^{-i\varphi_0})$ и отрезка $[q, \bar q]$. Положим

(2) $$\psi(t)=\frac{1}{2i}\int_\Gamma\frac{\varphi(z)e^{-zt}\,dz}{\sin\pi z}.$$

На лучах, входящих в состав Γ, в силу (1),

(3) $$\left|\frac{\varphi(z)}{\sin\pi z}\right|<A(\varepsilon)e^{(-\pi\sin\varphi_0+\varepsilon)|z|},\quad \forall\varepsilon>0.$$

Отсюда следует, что интеграл (2) сходится и представляет собой аналитическую функцию в угле $B(\varphi_0)$, одна сторона которого проходит через точку πi под углом $\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right)$ к вещественной оси, а другая сторона симметрична первой стороне относительно вещественной оси.

Оценка вида (3) остается справедливой на дугах $|z|=r_m=m\pi+\frac{\pi}{2}$ ($m=1, 2, \ldots$), $|\arg z|\leqq\varphi_0$. Поэтому, если Γ_m — замкнутый контур, составленный из части Γ, лежащей в круге $|z|\leqq r_m$, и дуги $|z|=r_m$, $|\arg z|\leqq\varphi_0$, то для t из угла $|\arg t|<\frac{\pi}{2}-\varphi_0$

$$\psi(t)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2i}\int_{\Gamma_m}\frac{\varphi(z)e^{-zt}\,dz}{\sin\pi z}=\sum_{n>p}(-1)^n\varphi(n)e^{-nt}.$$

Отметим теперь, что

$$\psi(t) = \frac{1}{2i} \int\limits_{\operatorname{Re} z = p} \frac{\varphi(z) e^{-zt}\, dz}{\sin \pi z}. \tag{4}$$

Этот интеграл сходится в полосе $|\operatorname{Im} t| < \pi$. Значит, $\psi(t)$ — функция, аналитическая в этой полосе и в полуплоскости $\operatorname{Re} t > 0$. Отсюда получаем, что и функция

$$\psi_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n e^{-nt}$$

— аналитическая в полосе $|\operatorname{Im} t| < \pi$ и в полуплоскости $\operatorname{Re} t > 0$. В силу этого, функция $\eta(t)$ — аналитическая вне отрезка $[0,1]$.

Также доказывается, что и $\eta_1(t)$ регулярна вне $[0,1]$. Поэтому $f(z) \in A$.

Замечание. Из представления (4) следует, что

$$|\psi(t)| < C|e^{-pt}|, \quad |\operatorname{Im} t| < \pi - \delta, \quad \delta > 0. \tag{5}$$

Отсюда вытекает, что вне угла $|\arg t| < \delta$ (при $t \to 0$)

$$|\eta(t)| < \frac{C}{|t|^{p+1}}, \quad |\eta_1(t)| < \frac{C}{|t|^{p+1}} \quad (C = C(\delta)). \tag{6}$$

3. Обращение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть функции* $\eta(t)$ *и* $\eta_1(t)$ *регулярны вне отрезка* $[0, 1]$ *и вне каждого угла* $|\arg t| < \delta$ *удовлетворяют условию* (6). *Тогда имеются функции* $\varphi(z)$ *и* $\varphi_1(z)$, *аналитические при* $\operatorname{Re} z \geqq N$ *и удовлетворяющие условию* (1), *такие, что* $a_n = \varphi(n)$, $\dfrac{1}{a_n} = \varphi_1(n)$, $n \geqq N$.

Доказательство. Положим

$$\psi(t) = \sum_{n > p} (-1)^{n-1} a_n e^{-nt}. \tag{7}$$

Согласно условиям теоремы, эта функция регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} t > 0$ и в полосе $|\operatorname{Im} t| < \pi$, причем в меньшей полосе $|\operatorname{Im} t| < \pi - \delta$ (при $t \to -\infty$) она имеет оценку (5). При $t \to +\infty$ в полосе $|\operatorname{Im} t| < \pi - \delta$

$$|\psi(t)| < C|e^{-p_1 t}|, \quad p_1 > p. \tag{8}$$

Рассмотрим интеграл

$$\varphi(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \int\limits_{-\infty + ic}^{\infty + ic} \psi(t) e^{zt}\, dt, \quad -\pi < c < \pi. \tag{9}$$

В силу (5) и (8) он сходится для z из полосы: $p<\operatorname{Re} z<p_1$ и значение не зависит от параметра c. Имеем

$$\varphi(z)=\frac{\sin \pi z}{\pi} \int_{-\infty}^{0} \psi(t) e^{tz}\, dt+\frac{\sin \pi z}{\pi} \int_{0}^{\infty} \psi(t) e^{tz}\, dt=\varphi_1(z)+\varphi_2(z).$$

Функция $\varphi_1(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z>p$, причем $\varphi_1(n)=0$, $n>p$. Функция $\varphi_2(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z<p_1$.

Возьмем φ_0, $0<\varphi_0<\frac{\pi}{2}$. Имеем

$$\varphi_2(z)=\frac{\sin \pi z}{\pi} \int_{0}^{\varepsilon e^{i\varphi_0}} \psi(t) e^{tz}\, dt+\frac{\sin \pi z}{\pi} \int_{\varepsilon e^{i\varphi_0}}^{\infty e^{i\varphi_0}} \psi(t) e^{tz}\, dt=\frac{\sin \pi z}{\pi} \varphi_3(z)+\varphi_4(z).$$

Функция $\varphi_3(z)$ — целая экспоненциального типа не выше ε. Изучим функцию $\varphi_4(z)$. Когда $\arg z=\varphi$ удовлетворяет условию: $\frac{\pi}{2}<\varphi+\varphi_0<\frac{3\pi}{2}$, получаем

$$\varphi_4(z)=\frac{\sin \pi z}{\pi} \int_{\varepsilon e^{i\varphi_0}}^{\infty e^{i\varphi_0}} \Big(\sum_{n>p}(-1)^{n-1} a_n e^{-nt}\Big) e^{tz}\, dt=$$

$$=-\frac{\sin \pi z}{\pi} e^{\varepsilon_0 z} \sum_{n>p}(-1)^{n-1} \frac{a_n e^{-\varepsilon_0 n}}{z-n}, \quad \varepsilon_0=\varepsilon e^{i\varphi_0}.$$

Правая часть — целая функция экспоненциального типа, в точке $z=n$ она имеет значение равное a_n. Кроме того,

$$|\varphi_4(x)|<e^{2\varepsilon x}, \quad x>x_0(\varepsilon).$$

В итоге функция $\varphi(z)$ регулярна и экспоненциального типа в полуплоскости $\operatorname{Re} z>p$, причем $\varphi(n)=a_n$ $(n>p)$ и

$$|\varphi(x)|<e^{\varepsilon x}, \quad x>x_1(\varepsilon), \quad \forall \varepsilon>0. \tag{10}$$

Пусть $z=p_2+iy$, $p<p_2<p_1$. Из (9) получаем

$$|\varphi(z)|<M|\sin \pi z| e^{-cy}, \quad -\pi<c<\pi.$$

Выбирая для $y>0$ величину c близкой к π, а для $y<0$ — близкой к $-\pi$, получим, что

$$|\varphi(z)|<B(\varepsilon) e^{\varepsilon|y|}, \quad z=p_2+iy, \quad \forall \varepsilon>0.$$

Отсюда и из (10) вытекает, что

$$|\varphi(z)|<e^{\varepsilon|z|}, \quad \operatorname{Re} z \geqq p_2, \quad |z|>r_0(\varepsilon), \quad \forall \varepsilon>0.$$

Функция $\varphi(z)$ обладает всеми необходимыми свойствами. Также доказывается наличие нужной функции $\varphi_1(z)$.

4. Два примера. В первом примере

$$f(z) = e^z + ae^{qz}, \quad 0 < q < 1.$$

Здесь

$$a_n = 1 + aq^n, \ \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1+aq^n}, \ \varphi(z) = 1 + ae^{z\ln q}, \ \varphi_1(z) = \frac{1}{1+ae^{z\ln q}} \quad (\ln q < 0).$$

Видим, что функции $\varphi(z)$ и $\varphi_1(z)$ обладают нужными свойствами и потому $f(z) \in A$.

Во втором примере

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n, \quad a_n = 1 + (-1)e^{-n^2} \quad (n \geqq 0).$$

Имеем

$$\eta(t) = \frac{1}{t-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-n^2}}{t^{n+1}}, \quad \eta_1(t) = \frac{1}{t-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-n^2}}{(1+(-1)^n e^{-n^2})t^{n+1}}.$$

Ряды сходятся при всех $t \neq 0$. Поэтому у $\eta(t)$ и $\eta_1(t)$ только две особенности $t=0$ и $t=1$, значит, $f(z) \in A$. Отметим, что при $t \to 0$, когда $t<0$, функция

$$\eta(t) = \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{t}\right)^n e^{-n^2}$$

стремится к ∞ быстрее любой степени $\left(\frac{1}{t}\right)$. В силу этого не существуют функции $\varphi(z)$ и $\varphi_2(z)$ с указанными выше свойствами.

5. Преобразование M. По определению преобразование M переводит функцию $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ в функцию

$$\Phi(z) = M(F) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n, \ B_n = a_n A_n \quad (n \geqq 0).$$

Теорема 3. *Пусть* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ *принадлежит классу* A. *Если функция* $F(z)$ *регулярна в области* E, *звездообразной относительно начала координат, то и функция* $\Phi(z) = M(F)$ *регулярна в* E, *причем если* K — *компакт из* E, *а* C — *замкнутый контур, лежащий в* E, *охватывающий компакт* K *и звездообразный относительно начала координат, то*

$$|\Phi(z)| < N \max_{t \in C} |F(t)|, \quad z \in K, \tag{11}$$

где постоянная N *не зависит от* $F(z)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \eta\left(\frac{t}{z}\right) F(t) \frac{dt}{z}, \tag{12}$$

где C — звездообразный относительно начал координат замкнутый контур, лежащий в E, и z лежит внутри C. Точка $\left(\frac{t}{z}\right)$ не может попасть на отрезок $[0,1]$, поэтому $\psi(z)$ — функция, аналитическая внутри C. Но C — произвольный контур из E, значит, функция $\psi(z)$ регулярна в области E.

Пусть $z \in K$, а $t \in C$. Тогда $\left|\eta\left(\frac{t}{z}\right)\right| \leqq N_1$ и из (12) следует

$$|z\psi(z)| \leqq N_1 l \max_{t \in C} |F(t)|$$

(l — длина контура C). Можно считать, что K содержит в себе некоторый круг $|z| \leqq \delta$. Тогда

$$|\psi(z)| \leqq \frac{N_1 l}{\delta} \max_{t \in C} |F(t)|, \quad z \in K, \quad |z| \geqq \delta,$$

$$|\psi(z)| \leqq \frac{N_1 l}{\delta} \max_{t \in C} |F(t)|, \quad |z| \leqq \delta$$

(второе неравенство справедливо, в силу принципа максимума модуля). Таким образом,

$$|\psi(z)| \leqq N \max_{t \in C} |F(t)|, \; z \in K, \; N = \frac{N_1 l}{\delta}.$$

Осталось доказать, что $\psi(z) = \Phi(z)$. Пусть $|z|$ достаточно мал. Тогда

$$\eta\left(\frac{t}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^{n+1}}{t^{n+1}}, \quad t \in C,$$

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(t)\,dt}{t^{n+1}}\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A_n z^n = \Phi(z).$$

Аналогично устанавливается, что если $\Phi(z)$ регулярна в E, то фикция $F(z) = M^{-1}(\Phi)$ также регулярна в E и

$$|F(z)| < N_1 \max_{t \in C} |\Phi(t)|, \quad z \in K. \tag{13}$$

Отметим следующие свойства преобразования M:

1. $M(F_1 + F_2) = M(F_1) + M(F_2)$;
2. $M(cF) = cM(F)$;

3. Пусть функции $F_n(z)$ $(n \geqq 1)$ регулярны в области E (звездообразной относительно начала координат) и $\{F_n(z)\}$ равномерно сходится внутри E к $F(z)$. Тогда внутри E равномерно $M(F_n) \to M(F)$;

4. Если функции $\Phi_n(z)$ регулярны в E и $\{\Phi_n(z)\}$ равномерно сходится внутри E к $\Phi(z)$, то внутри E равномерно $M^{-1}(\Phi_n) \to M^{-1}(\Phi)$;

5. $M(e^{\lambda z}) = f(\lambda z)$.

Свойства 3 и 4 вытекают на основании оценок (11) и (13).

6. Разложение в ряд. Как было указано в начале статьи, каждую функцию $\Phi(z)$, аналитическую в конечной выпуклой области D, можно представить в виде

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\lambda_n z}, \quad z \in D \tag{14}$$

(показатели зависят только от области D, сходимость — равномерная внутри D).

Теорема 4. *Пусть D — конечная выпуклая область, $0 \in D$ и $f(z) \in A$. Тогда каждую функцию $\Phi(z)$, аналитическую в D, можно представить в виде*

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n f(\lambda_n z) \tag{15}$$

(сходимость внутри D — равномерная).

Доказательство. Положим $F(z) = M^{-1}(\Phi)$. Функцию $F(z)$ представим рядом (14). Тогда

$$\Phi(z) = M(F) = M\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\lambda_n z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n M(e^{\lambda_n z}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n f(\lambda_n z), \quad z \in D.$$

7. Формулы для коэффициентов. Пусть $A(\bar{D})$ — класс функций, аналитических на замыкании $\bar{D}$. В случае, когда $F(z) \in A(\bar{D})$, имеются формулы для определения коэффициентов A_n в разложении (14). Именно, пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа и вполне регулярного роста с индикатрисой роста $h(\varphi) = K(-\varphi)$ ($K(\varphi)$ — опорная функция области $\bar{D}$) и простыми нулями $\lambda_n = |\lambda_n| e^{i\varphi_n}$ $(n \geqq 1)$, причем

$$|L'(\lambda_n)| > e^{[h(\varphi_n) - \varepsilon]|\lambda_n|}, \quad n > n_0(\varepsilon), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Тогда в разложении (14) в качестве показателей можно взять нули λ_n этой функции $L(\lambda)$, а в качестве коэффициентов — величины

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \psi_n(t) F(t)\, dt \quad (n \geqq 1),$$

где $\psi_n(t)$ — функции, ассоциированные по Борелю с функциями

$$\frac{L(\lambda)}{(\lambda-\lambda_n)L'(\lambda_n)}$$

(они регулярны вне $\bar{D}$), а C — замкнутый контур, охватывающий $\bar{D}$, на котором и внутри которого $F(t)$ — аналитическая функция.

Имеем

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \psi_n(t)M^{-1}(\Phi)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_C \psi_n(t)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\eta_1\left(\frac{u}{t}\right)\Phi(u)\frac{du}{t}\right\}dt.$$

Здесь C_1 — замкнутый выпуклый контур, охватывающий контур C, на котором и внутри которого $\Phi(u)$ — аналитическая функция. Поменяв порядок интегрирования, получим

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\gamma_n(u)\Phi(u)\,du \quad (n \geqq 1), \tag{16}$$

где

$$\gamma_n(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \psi_n(t)\eta_1\left(\frac{u}{t}\right)\frac{dt}{t}.$$

Функции $\gamma_n(u)$ регулярны вне $\bar{D}$ и $\gamma_n(\infty)=0$. Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\gamma_n(u)f(\lambda_m u)\,du = \frac{1}{2\pi i}\int_C \psi_n(t)e^{\lambda_m t}\,dt = \delta_{nm}.$$

Таким образом, $\{\gamma_n(u)\}$ — система, биортогональная системе $\{f(\lambda_n z)\}$. С помощью ее коэффициенты в разложении (15) определяются по формулам (16) (при условии $\Phi(z)\in A(\bar{D})$).

8. Пример функции $f(z)$, когда теорема 4 не имеет места. Положим $f(z)=e^z+e^{qz}$. Тогда

$$\eta(t) = \frac{1}{t-1}+\frac{1}{t-q}.$$

Если $q\notin[0,1]$, то $f(z)$ не принадлежит классу A (при $q\in[0,1]$ она принадлежит классу A). Покажем, что в этом случае существуют выпуклые области D $(0\in D)$, в которых представление произвольной аналитической в D функции $\Phi(z)$ рядом (15) невозможнло.

Имеем

$$f(z) = 2e^{\mu z}\cos\lambda z, \quad \mu = \frac{1+q}{2}, \quad \lambda = \frac{1-q}{2i}.$$

Лемма 1. *Вне окрестностей* $\left|z\mp\frac{k\pi-\pi/2}{\lambda}\right|<\frac{1}{k^\alpha}$ $(k\geqq 1, \alpha>0)$ *и* $|z|>1$

(17) $$|f(z)| > \frac{B}{|z|^\alpha}\max\left(|e^z|, |e^{qz}|\right), \quad B>0,$$

где B — постоянная.

Доказательство. Вне указанных окрестностей

$$|\cos\lambda z| > \frac{B}{|z|^\alpha}\exp\{|\mathrm{Im}\,(\lambda z)|\}, \quad B>0.$$

Пусть z лежит вне этих окрестностей. В случае $\mathrm{Im}\,(\lambda z)\geqq 0$ получаем

$$|f(z)| > \frac{B}{|z|^\alpha}\exp\{\mathrm{Re}\,(\mu z)+\mathrm{Im}\,(\lambda z)\}.$$

Но $(\mu=i\lambda+q)$

$$\mathrm{Re}\,(\mu z)+\mathrm{Im}\,(\lambda z)=\mathrm{Re}\,(qz)+\mathrm{Re}\,(i\lambda z)+\mathrm{Im}\,(\lambda z)=\mathrm{Re}\,(qz).$$

Кроме того $(\mu=1-i\lambda)$

$$\mathrm{Re}\,(\mu z)+\mathrm{Im}\,(\lambda z)\geqq\mathrm{Re}\,(\mu z)=\mathrm{Re}\,z-\mathrm{Re}\,(i\lambda z)=\mathrm{Re}\,z+\mathrm{Im}\,(\lambda z)\geqq\mathrm{Re}\,z.$$

Отсюда и следует неравенство (17).

В случае $\mathrm{Im}(\lambda z)<0$ имеем

$$|f(z)| > \frac{B}{|z|^\alpha}\exp\{\mathrm{Re}\,(\mu z)-\mathrm{Im}\,(\lambda z)\}.$$

В этом случае $(\mu=1-i\lambda)$

$$\mathrm{Re}\,(\mu z)-\mathrm{Im}\,(\lambda z)=\mathrm{Re}\,z-\mathrm{Re}\,(i\lambda z)-\mathrm{Im}\,(\lambda z)=\mathrm{Re}\,z$$

и, кроме того $(\mu=i\lambda+q)$,

$$\mathrm{Re}\,(\mu z)-\mathrm{Im}\,(\lambda z)\geqq\mathrm{Re}\,(\mu z)=\mathrm{Re}\,(qz)-\mathrm{Im}\,(\lambda z)\geqq\mathrm{Re}\,(qz).$$

Опять получаем (17).

Лемма 2. *Пусть* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{n}{|\lambda_n|}<\infty$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_nf(\lambda_nz)$ *сходится в окрестности* $|z-z_0|<\delta$ $(z_0\neq 0)$. *Тогда в некоторой окрестности* $|z-z_0|<\delta_0<\delta$ *сходятся ряды*

(18) $$\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{\lambda_nz}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{q\lambda_nz}.$$

Доказательство. Вне кружков

$$C_k^{(n)}:\ \left|z\mp\frac{k\pi-\pi/2}{\lambda_n}\right|<\frac{1}{|\lambda_n|k^\alpha} \quad (k\geqq 1)$$

согласно лемме 1, имеет место оценка

$$|f(\lambda_n z)| > \frac{B}{|\lambda_n z|^\alpha} \max(|e^{\lambda_n z}|, |e^{q\lambda_n z}|). \tag{19}$$

Пусть $0<r<|z_0|-\delta<|z_0|+\delta<R$. Кружки $C_k^{(n)}$, которые имеют общие точки с окрестностью K: $|z-z_0|<\delta$, таковы, что при $n>n_0$

$$r<\frac{k\pi}{|\lambda_n|}<R.$$

Отсюда $\frac{r|\lambda_n|}{\pi}<k<\frac{R|\lambda_n|}{\pi}$ и, значит, сумма диаметров $C_k^{(n)}$, имеющих общие точки с окрестностью K, не превосходит величины

$$\frac{R|\lambda_n|}{\pi}\cdot\frac{2}{|\lambda_n|\left(\frac{r|\lambda_n|}{\pi}\right)^\alpha}=\frac{a}{|\lambda_n|^\alpha}.$$

Сумма диаметров указанных кружков, когда n меняется от N до ∞, не превосходит

$$\alpha_N \equiv a\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_n|^\alpha}\to 0, \quad N\to\infty, \quad \alpha>1.$$

Пусть $\alpha_N<\delta$. Тогда найдется окружность $|z-z_0|=\delta_1$, $0<\delta_1<\delta$, которая не пересекается с рассматриваемыми кружками и на ней, следовательно, выполняется оценка (19) при $n\geqq N$. Возьмем на этой окружности точки γ_1, γ_2, γ_3 так, чтобы они образовывали треугольник E, внутри которого лежит точка z_0. Согласно условию

$$|A_n f(\lambda_n\gamma_j)|\leqq M \quad (n\geqq N;\ j=1, 2, 3).$$

Отсюда, на основании (19), получаем

$$|A_n e^{\lambda_n\gamma_j}|<M_1|\lambda_n|^\alpha, \quad |A_n e^{q\lambda_n\gamma_j}|<M_1|\lambda_n|^\alpha \quad (n\geqq N).$$

Учтем еще, что, в силу неравенства $a^x b^{1-x}<a+b$, $a>0$, $b>0$, $0\leqq x\leqq 1$, для точек z отрезка $[z_1, z_2]$ выполняется соотношение $(z=\beta z_1+(1-\beta)z_2,\ 0\leqq\beta\leqq 1)$

$$|e^{\lambda_n z}|\leqq|e^{\lambda_n z_1}|+|e^{\lambda_n z_2}|.$$

Поэтому на границе треугольника E, а, следовательно, и внутри него

$$|A_n e^{\lambda_n z}|\leqq 3M_1|\lambda_n|^\alpha, \quad |A_n e^{q\lambda_n z}|\leqq 3M_1|\lambda_n|^\alpha. \tag{20}$$

Возьмем внутри E окружность $|z-z_0|=\varrho$ и для точек этой окружности запишем

$$|A_n e^{\lambda_n z_0}|=|A_n e^{\lambda_n z}||e^{-\lambda_n(z-z_0)}|.$$

Пусть $|z-z_0|=\varrho$, $\arg(z-z_0)=-\arg\lambda_n$. Тогда, в силу (20)

$$|A_n e^{\lambda_n z_0}| \leqq 3M_1|\lambda_n|^{\alpha} e^{-\varrho|\lambda_n|}, \quad n \geqq N.$$

Значит, первый из рядов (18) в точке z_0 сходится. Аналогично убедимся, что и второй ряд в точке z_0 сходится. Итак, из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} A_n f(\lambda_n z)$ в круге $|z-z_0|<\delta$ вытекает сходимость рядов (18) в центре круга. Но тогда, в силу этого, ряды (18) сходятся в некоторой окрестности $|z-z_0|<\delta_0$.

Лемма 3. *Пусть D — область сходимости ряда* (15), *а G и G_q — области сходимости рядов* (18). *Тода $D=G\cap G_q$.*

Доказательство, в силу леммы 2, очевидно.

Пусть D — прямоугольник: $|\mathrm{Re}\, z|<\varepsilon$, $-h_1<\mathrm{Im}\, z<h_2$, $h_2>h_1>0$. Возьмем функцию $\Phi(z)=\dfrac{1}{z-\varepsilon}$. Допустим, что имеет место разложение (15). Если $z\in D$, то $z\in G$ и $qz\in G$. Когда z пробегает D, в это время точка qz будет пробегать прямоугольник D_q, получаемый из D растяжением в $|q|$ раз и поворотом вокруг начала координат на угол $\varphi_0=\arg q$. Считаем, что $|q|\leqq 1$ и $\varphi_0\neq 0$. Пусть $\varphi_0\neq\pi$. Так как область сходимости ряда Дирихле — выпуклая, то, значит, область G содержит в себе выпуклую оболочку прямоугольников D и D_q. Выпуклая оболочка содержит в себе круг $|z|<R$, радиус R которого зависит от q, h_1 и ε, причем при $\varepsilon\to 0$ этот радиус, убывая, стремится к некоторому предельному значению $R_0>0$. Видим, что область G содержит в себе круг E_0: $|z|<R_0$. Но тогда и $G_q\supset E_0$. Отсюда вытекает, что ряд (15) сходится и представляет собой аналитическую функцию $\Phi(z)=\dfrac{1}{z-\varepsilon}$ в круге E_0. Но этого не может быть, если ε мало. Еще проще доводится до противоречия и случай, когда $\varphi_0=\pi$. Итак, прямоугольник малой ширины и не симметричный относительно точки $z=0$ не может служить областью D, в которой любая аналитическая функция разлагалась бы в ряд (15).

Литература

[1] А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука (Москва, 1976).

ОТДЕЛ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ
БАШКИРСКОГО ФИЛИАЛА АН СССР
УЛ. МУКАЕВА 50
450057 УФА, СССР